УДК 517.524

РАЗЛОЖЕНИЕ В ЦЕПНУЮ ДРОБЬ ФУНКЦИИ $\operatorname{cosec}(x) + \operatorname{ctg}(x)$

С.Н. Гладковский

Автором предложен элементарный вывод разложения в цепную дробь функции $\operatorname{cosec}(x) + \operatorname{ctg}(x)$.
Ключевые слова: непрерывная дробь, цепная дробь.

Функция $w(x) = \operatorname{cosec}(x) + \operatorname{ctg}(x)$ являет собой тот редкий случай, когда для простой с виду элементарной функции не удаётся обнаружить разложение в цепную дробь не только ни в одном из общеизвестных справочников (см., например, [3],[4],[5],[8]), но и в многочисленных монографиях, специально посвящённых цепным дробям (см., например, [1],[2],[6],[7],[9],[10],[11],[12],[13],[14],[15],[16],[17]). Чтобы исправить такое положение, автор предлагает элементарный вывод разложения в цепную дробь вышеуказанной функции.

Как известно, (см., например, [3],[4]),

$$x\operatorname{ctg}(x) = 1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{9 - \dots}}}}. \quad (1)$$

Нетрудно убедиться, что

$$x\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right) = 2E_0(x), \text{ где} \quad (2)$$

$$E_k(x) = 2k + 1 - \frac{x^2/4}{E_{k+1}(x)};\ k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

Пусть $E_k(x) = \dfrac{W_k(x)}{2}$ для любого неотрицательного целого числа k, тогда (3) после несложных преобразований примет следующий вид

$$W_k(x) = 4k + 2 - \frac{x^2}{W_{k+1}(x)}. \quad (4)$$

Поскольку

$$E_0(x) = \frac{W_0(x)}{2} = \frac{x}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{\sin(x)} + \operatorname{ctg}(x)\right),$$

то получаем искомое

$$\operatorname{cosec}(x) + \operatorname{ctg}(x) = \frac{1}{\sin(x)} + \operatorname{ctg}(x) = \frac{1}{x}W_0(x). \quad (5)$$

Литература

1. Бейкер Дж., мл., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде /пер. с англ. под ред. Гончара А.А. М.: Мир, 1986, – 502с. ил.
2. Джоунс У., Трон У. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения /ред. пер. с англ.: И.Д. Софронов. М.: Мир, 1985, – 414с. ил.
3. Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби)/ Под ред. Люстерника Л.А. и Янпольского А.Р. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961.
4. Математический анализ. Вычисление элементарных функций/ Под ред. Люстерника Л.А. и Янпольского А.Р. М.: Физматгиз, 1963.
5. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган /пер. с англ. под ред. В.А. Диткина и Л.Н. Кармазиной М.: Наука, 1979, 832 стр. с илл.
6. Стилтьес Т.И. Исследования о непрерывных дробях /пер. с фр. под ред. Ахиезера Н.И. Харьков: Государственное научно-техническое издательство Украины, 1936.– 156 с.
7. Хованский А.Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам

приближённого анализа. М.: Гостехиздат, 1956., 204 с.
8. A.Cuyt, V.Brevik Petersen, B.Verdonk, H.Waadeland , W.B.Jones. Handbook of Continued fractions for Special Functions. New York: Springer, 2008.– 431s.
9. Jones W.B., Thron W.J. Continued fractions. Analytic theory and applications.London: Addison-Wesley P C, 1980.– 457s.
10. Lorentzen L., Waadeland H. Continued fractions with applications. Amsterdam, London, New York, Tokyo: North Holland, 1992.– 623s.
11. Olds C.D. Continued fractions. Yale: Mathematical Association of America, 1963.– 162 s
12. Perron O. Die Lehre von den Kettenbruechen. Band 1. 3ed., Gottingen: Teubner, 1954.– 200 s.
13. Perron O. Die Lehre von den Kettenbruechen. Band 2. 3ed., Stuttgart: Teubner, 1957.– 322 s.
14. Rockett A.M., Szuesz P. Continued fractions. London: World Scientific Publishing, 1992.– 196s.
15. Stieltjes T.J. Oeuvres completes, tome 1. Groningen: Noordhoff, 1918.– 467s.
16. Stieltjes T.J. Oeuvres completes, tome 2. Groningen: Noordhoff, 1918.– 609 s.
17. Wall H.S. Analytic theory of continued fractions. New York: Chelsea, 1948.– 445s.

S.N. Gladkovskii

Continued fraction expansion for function $\frac{1}{\sin(x)} + \cot(x)$

The autor propose the elementary derivation of the continued fraction expansion for function $\frac{1}{\sin(x)} + \cot(x)$.

Keywords: continued fraction, chain fraction

Гладковский Сергей Николаевич

Ставропольский край, Георгиевский р-он
ст. Незлобная, ул. Толстого д.14
E-mail: journaly2010@bk.ru